# Denotationale Semantik

## *Ein Beispiel:*

**in (X,Y);**
**while $X \neq 0$ do X:=X-Y; Y:=Y-X od;**
**out (Y)**

*Aufgabe: Berechne speziell die Bedeutung von*
**while b do c od** mit $b \equiv X \neq 0$
und $c \equiv X:=X-Y; Y:=Y-X$

**Grundsätzliches Vorgehen:**

- ein paar Beispiele durchrechnen,
- die Funktion des Rumpfes der while-Schleife berechnen,
- Eigenschaften über sie notieren (sofern möglich),
- $f_1$, $f_2$, $f_3$ möglichst formal berechnen,
- endlichen Ausschnitt aufschreiben, um etwas zu „erkennen“,
- Hypothesen über die realisierte Funktion aufstellen
- und Beweise führen.

| | |
|---|---|
| Eingabe (0,1) | Ausgabe 1 |
| Eingabe (0,a) | Ausgabe a |
| Eingabe (2,2) | Ausgabe 2 |
| Eingabe (a,a) | Ausgabe a |
| Eingabe (3,2) | Ausgabe 1 |
| Eingabe (6,4) | Ausgabe 2 |
| Eingabe (8,5) | Ausgabe 1 |

Terminiert die while-Schleife immer?

Leider nein, z.B. nicht bei Eingabe (1,0).
Man probiert aus und stellt fest, dass die while-Schleife für die meisten Werte zu divergieren scheint.

$\mathbf{f_c}$=?  X:=X-Y; Y:=Y-X  liefert:  $\mathbf{f_c}(a,b) = (a-b, 2b-a)$

---

Bemerkung: $\mathbf{f_c}$ ist injektiv,
d.h., aus $\mathbf{f_c}(a,b) = \mathbf{f_c}(x,y)$ folgt $a = x$ und $b = y$.

Der Beweis ist einfach,
denn $\mathbf{f_c}(a,b) = \mathbf{f_c}(x,y)$ bedeutet $(a-b,2b-a) = (x-y,2y-x)$, also
$a-b = x-y$ und $2b-a = 2y-x$, d.h., $b + (b-a) = y + (y-x)$.
Einsetzen ergibt $b = y$ und $a = x$.

$\mathbf{f_c}(a,b) = (a-b,2b-a)$ als unendlich große Funktionstabelle:

| X = \ Y = | … | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | |
| -3 | … | 0,-3 | -1,-1 | -2,1 | -3,3 | -4,5 | -5,7 | -6,9 | -7,11 | -8,13 | -9,15 | -10,17 | -11,19 | … |
| -2 | … | 1,-4 | 0,-2 | -1,0 | -2,2 | -3,4 | -4,6 | -5,8 | -6,10 | -7,12 | -8,14 | -9,16 | -10,18 | … |
| -1 | … | 2,-5 | 1,-3 | 0,-1 | -1,1 | -2,3 | -3,5 | -4,7 | -5,9 | -6,11 | -7,13 | -8,15 | -9,17 | … |
| 0 | … | 3,-6 | 2,-4 | 1,-2 | 0,0 | -1,2 | -2,4 | -3,6 | -4,8 | -5,10 | -6,12 | -7,14 | -8,16 | … |
| 1 | … | 4,-7 | 3,-5 | 2,-3 | 1,-1 | 0,1 | -1,3 | -2,5 | -3,7 | -4,9 | -5,11 | -6,13 | -7,15 | … |
| 2 | … | 5,-8 | 4,-6 | 3,-4 | 2,-2 | 1,0 | 0,2 | -1,4 | -2,6 | -3,8 | -4,10 | -5,12 | -6,14 | … |
| 3 | … | 6,-9 | 5,-7 | 4,-5 | 3,-3 | 2,-1 | 1,1 | 0,3 | -1,5 | -2,7 | -3,9 | -4,11 | -5,13 | … |
| 4 | … | 7,-10 | 6,-8 | 5,-6 | 4,-4 | 3,-2 | 2,0 | 1,2 | 0,4 | -1,6 | -2,8 | -3,10 | -4,12 | … |
| 5 | … | 8,-11 | 7,-9 | 6,-7 | 5,-5 | 4,-3 | 3,-1 | 2,1 | 1,3 | 0,5 | -1,7 | -2,9 | -3,11 | … |
| ⋮ | | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | |

Betrachte nun: $\Gamma_{b,c}(\mathbf{f}) = \mathbf{cond}\ (\mathbf{X} \neq \mathbf{0}, \mathbf{f} \circ \mathbf{f_c}, \mathbf{id})$

Hinweis zur formalen Korrektheit:
**X** bedeutet die Projektion auf die erste Komponente;
**id** ist hier die Identität auf 9×9, also auf der Menge der Paare ganzer Zahlen.

Es gilt also für alle ganzen Zahlen a und b:

$$\Gamma_{b,c}(f)(a,b) = \mathrm{cond}\ (X \neq 0, f \circ f_c, id)(a,b)$$

$$= \begin{cases} f(a-b, 2b-a) & \text{, falls } a \neq 0 \\ (a,b) & \text{, falls } a = 0 \end{cases}$$

Hinweis zur formalen Korrektheit: $\Gamma_{b,c}$ **(f)** ordnet der Speicherbelegung
$X \rightarrow a$, $Y \rightarrow b$ für $a \neq 0$ die Speicherbelegung $X \rightarrow a\text{-}b$, $Y \rightarrow 2b\text{-}a$
und anderenfalls unverändert die Speicherbelegung $X \rightarrow a$, $Y \rightarrow b$ zu.

Man setze gemäß der denotationalen Semantik:

$$\mathbf{f_0 = f_\perp}$$ (= die überall undefinierte Funktion $f_\perp(a,b) = (\perp,\perp)$ für alle a und b)

$$\mathbf{f_{i+1} = \Gamma_{b,c}(f_i) \quad für\ alle\ i \geq 0}$$

und berechne von $\Gamma_{b,c}$ den kleinsten Fixpunkt $\mathbf{fix}(\Gamma_{b,c})$, also

$$\mathbf{fix}\,(\,\Gamma_{b,c}\,) = \lim_{i \to \infty} \mathbf{f_i}\ .$$

Dies ist die Bedeutung der while-Schleife.

# Für unser Beispiel erhalten wir:

$f_0 = f_\perp$ (= die überall undefinierte Funktion $f_\perp(a,b) = (\perp,\perp)$ für alle a und b)

$f_1 = \Gamma_{b,c}(f_0) = \text{cond}\ (X\neq 0, f_0 \circ f_c, id)$, d.h. $\forall a,b \in 9$ :

$$f_1(a,b) = \begin{cases} f_0(a-b,2b-a) = (\perp,\perp) & \text{, falls } a\neq 0 \\ (a,b) & \text{, falls } a=0 \end{cases}$$

$f_2 = \Gamma_{b,c}(f_1) = \text{cond}\ (X\neq 0, f_1 \circ f_c, id)$, d.h. $\forall a,b \in 9$ :

$$f_2(a,b) = \begin{cases} f_1(a-b,2b-a) & \text{, falls } a\neq 0 \\ (a,b) & \text{, falls } a=0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \left.\begin{array}{ll} f_1(a-b,2b-a) = (\perp,\perp) & \text{, falls } a-b\neq 0 \\ (a-b,2b-a) & \text{, falls } a-b=0 \end{array}\right\} \text{ und } a\neq 0 \\ (a,b) \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \text{, falls } a=0 \end{cases}$$

$$f_3 = \Gamma_{b,c}(f_2) = \mathrm{cond}\,(X\neq 0, f_2 \circ f_c, id),\ \text{d.h. } \forall a,b \in 9:$$

$$f_3(a,b) = \begin{cases} f_2(a-b, 2b-a) & \text{, falls } a\neq 0 \\ (a,b) & \text{, falls } a=0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} f_1(2a-3b, 5b-3a) & \text{, falls } 2a-3b\neq 0,\ a-b\neq 0,\ \ a\neq 0 \\ (2a-3b, 5b-3a) & \text{, falls } 2a-3b=0,\ a-b\neq 0,\ \ a\neq 0 \\ (a-b, 2b-a) & \text{, falls } a-b=0 \text{ und } a\neq 0 \\ (a,b) & \text{, falls } a=0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (\perp, \perp) & \text{, falls } 2a-3b\neq 0,\ a-b\neq 0,\ \ a\neq 0 \\ (0, 5b-3a) & \text{, falls } 2a-3b=0,\ a-b\neq 0,\ \ a\neq 0 \\ (0, 2b-a) & \text{, falls } a-b=0 \text{ und } a\neq 0 \\ (0, b) & \text{, falls } a=0 \end{cases}$$

**Man rechnet weiter nach:**

$$f_4(a,b) = \begin{cases} f_3(a-b, 2b-a) & \text{, falls } a \neq 0 \\ (a,b) & \text{, falls } a = 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (\perp, \perp) & \text{, falls } 5a-8b \neq 0,\ 2a-3b \neq 0,\ a-b \neq 0,\ a \neq 0 \\ (0, 13b-8a) & \text{, falls } 5a-8b = 0,\ 2a-3b \neq 0,\ a-b \neq 0,\ a \neq 0 \\ (0, 5b-3a) & \text{, falls } 2a-3b = 0,\ a-b \neq 0,\ a \neq 0 \\ (0, 2b-a) & \text{, falls } a-b = 0 \text{ und } a \neq 0 \\ (0, b) & \text{, falls } a = 0 \end{cases}$$

**usw.**

„Sieht“ man etwas? Eine Regelmäßigkeit? Die Koeffizienten scheinen aufeinander folgende Fibonaccizahlen zu sein?!

**$f_0 = f_\perp$**

<u>in</u> (X,Y); <u>while</u> X≠0 <u>do</u> X:=X-Y; Y:=Y-X <u>od</u>; <u>out</u> (Y)

| X = \ Y= | … | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | |
| -3 | … | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | … |
| -2 | … | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | … |
| -1 | … | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | … |
| 0 | … | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | … |
| 1 | … | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | … |
| 2 | … | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | … |
| 3 | … | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | … |
| 4 | … | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | … |
| 5 | … | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | … |
| ⋮ | | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | |

$\mathbf{f_1 = \Gamma_{b,c}(f_0)}$ <u>in</u> (X,Y); <u>while</u> X≠0 <u>do</u> X:=X-Y; Y:=Y-X <u>od</u>; <u>out</u> (Y)

| X = \ Y = | … | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | |
| -3 | … | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | … |
| -2 | … | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | … |
| -1 | … | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | … |
| 0 | … | 0,-3 | 0,-2 | 0,-1 | 0,0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | … |
| 1 | … | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | … |
| 2 | … | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | … |
| 3 | … | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | … |
| 4 | … | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | … |
| 5 | … | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | … |
| ⋮ | | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | |

$f_2 = \Gamma_{b,c}(f_1)$ in (X,Y); while X≠0 do X:=X-Y; Y:=Y-X od; out (Y)

| X = \ Y = | … | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | |
| -3 | … | 0,-3 | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | … |
| -2 | … | ⊥,⊥ | 0,-2 | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | … |
| -1 | … | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | 0,-1 | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | … |
| 0 | … | 0,-3 | 0,-2 | 0,-1 | 0,0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | … |
| 1 | … | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | 0,1 | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | … |
| 2 | … | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | 0,2 | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | … |
| 3 | … | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | 0,3 | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | … |
| 4 | … | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | 0,4 | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | … |
| 5 | … | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | 0,5 | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | … |
| ⋮ | | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | |

$\mathbf{f_3 = \Gamma_{b,c}(f_2)}$ in (X,Y); while X≠0 do X:=X-Y; Y:=Y-X od; out (Y)

| X = \ Y = | … | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | |
| -3 | … | 0,-3 | **0,-1** | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | … |
| -2 | … | ⊥,⊥ | 0,-2 | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | … |
| -1 | … | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | 0,-1 | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | … |
| 0 | … | 0,-3 | 0,-2 | 0,-1 | 0,0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | … |
| 1 | … | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | 0,1 | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | … |
| 2 | … | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | 0,2 | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | … |
| 3 | … | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | **0,1** | 0,3 | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | … |
| 4 | … | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | 0,4 | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | … |
| 5 | … | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | 0,5 | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | … |
| ⋮ | | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | |

# **fix ( $\Gamma_{b,c}$ )** <u>in</u> (X,Y); <u>while</u> X≠0 <u>do</u> X:=X-Y; Y:=Y-X <u>od</u>; <u>out</u> (Y)

| X = \ Y= | … | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | |
| -3 | … | 0,-3 | 0,-1 | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | … |
| -2 | … | ⊥,⊥ | 0,-2 | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | … |
| -1 | … | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | 0,-1 | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | … |
| 0 | … | 0,-3 | 0,-2 | 0,-1 | 0,0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | … |
| 1 | … | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | 0,1 | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | … |
| 2 | … | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | 0,2 | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | … |
| 3 | … | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | 0,1 | 0,3 | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | … |
| 4 | … | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | 0,4 | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | … |
| 5 | … | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | 0,5 | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | ⊥,⊥ | … |
| ⋮ | | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | |

Hypothesen aufstellen (nach einigem Probieren)

<u>Betrachte die Fibonaccizahlen:</u>
$F_0 = 0$, $F_1 = 1$ und für alle $i \geq 0$: $F_{i+2} = F_{i+1} + F_i$ .

$F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$, $F_6 = 8$,
$F_7 = 13$, $F_8 = 21$, $F_9 = 34$, $F_{10} = 55$, $F_{11} = 89$, $F_{12} = 144$, ...

Die <u>while</u>-Schleife terminiert zum Beispiel für die Eingaben (0,1) und (1,1) und $(F_{2k}, F_{2k-1})$ und $(-F_{2k}, -F_{2k-1})$ für alle natürlichen Zahlen k. Auch für deren Vielfache. Aber andere Beispiele findet man nicht ??

Setzt man $\mathbf{F_{-1} = }$ -1, dann erhält man folgende Hypothese:

**Das Programm terminiert genau für alle Eingaben**

$$(\mathbf{a \cdot F_{2k}, a \cdot F_{2k-1}})$$

**für alle ganzen Zahlen a und alle natürlichen Zahlen k ≥ 0 und liefert dann als Ausgabe die Zahl a.**

Selbst versuchen, dies zu beweisen.
Dass das Programm hierfür terminiert, sieht man leicht ein; dass die while-Schleife nur für diese Eingaben terminiert, erkennt man aus der Folge $(X,Y) \to (X\text{-}Y, 2Y\text{-}X)$.

*Hinweis:* Wenn die while-Schleife für $(X,Y) = \mathbf{(a \cdot F_{2k}, a \cdot F_{2k-1})}$ terminiert und das Ergebnis (0,a) liefert, dann betrachte die Anfangswerte $(X,Y) = \mathbf{(a \cdot F_{2k+2}, a \cdot F_{2k+1})}$. Nach einem Schleifendurchlauf hat sich diese Variablenbelegung dann geändert zu (beachte: $F_{2k+2} - F_{2k+1} = F_{2k}$):

$$
\begin{aligned}
(X\text{-}Y,\ 2Y\text{-}X) &= (a \cdot F_{2k+2} - a \cdot F_{2k+1},\ 2a \cdot F_{2k+1} - a \cdot F_{2k+2}) \\
&= (a \cdot F_{2k},\ a \cdot F_{2k+1} - a \cdot (F_{2k+2} - F_{2k+1})) \\
&= (a \cdot F_{2k},\ a \cdot F_{2k+1} - a \cdot F_{2k}) \\
&= (a \cdot F_{2k},\ a \cdot F_{2k-1}),
\end{aligned}
$$

d.h., auch mit diesen Eingabewerten terminiert die while-Schleife und liefert ebenfalls das Ergebnis (0,a).

Alle anderen Eingaben divergieren gegen $\pm(\infty,-\infty)$.